I - ECOULEMENT DANS UN MILIEU POREUX : MESURE DE PERMEABILITE

1. Description du dispositif expérimental

Le schéma du dispositif expérimental est représenté sur la figure 1. Il est constitué:

- d'un cylindre vertical, de section A = 100 cm^2 et de longueur L = 20 cm, contenant un milieu poreux sous la forme d'un empilement désordonné compact de billes de verre de diamètre 1 mm;
- d'un réservoir d'alimentation à hauteur constante;
- d'un manomètre à eau permettant d'obtenir la différence de pression entre l'entrée et la sortie du milieu poreux;
- d'une éprouvette graduée permettant de mesurer le débit volumique à la sortie du cylindre avec l'aide d'un chronomètre.

2. Manipulation

Ouvrir la vanne quart de tour permettant de remplir le réservoir d'alimentation. Attention de ne pas ouvrir cette vanne trop brusquement ni complètement. Le débit à travers le milieu poreux se règle en faisant varier la hauteur du réservoir d'alimentation à l'aide de la crémaillère. Pour une dizaine de hauteurs différentes, mesurer le débit volumique q_v et la différence de hauteur d'eau Δh.

3. Calculs et résultats

Tracer sur un graphe les points expérimentaux du débit volumique $q_{v\,exp}$ en fonction de la perte de charge Δh :

$$q_{v_{exp}} = f(\Delta h)$$

Lisser les points expérimentaux par une droite. En déduire la valeur du coefficient de perméabilité K du milieu poreux (voir l'annexe théorique). Comparer cette valeur avec les valeurs usuelles du sable ($K \approx 3.10^{-10}$ m^2) et des galets ($K \approx 3.10^{-9}$ m^2).

Fluidisation/renardage?

Il se peut que les points correspondant à des valeurs élevées de débits s'écartent de la loi linéaire : pour une charge trop élevée, que l'on peut calculer, il y a un débit d'entraînement du matériau et la loi n'est plus vérifiée (phénomène de fluidisation ou de renardage). En effet, le milieu est soumis d'une part à son propre poids diminué de la poussée d'Archimède $(\rho_s - \rho)g$, d'autre part, au gradient de pression motrice $\partial(p + \rho g z) / \partial z$, et il y aura entraînement si la traînée devient supérieure au poids. Ceci a lieu en théorie pour une vitesse de renardage (ou de fluidisation) v_r égale a :

$$v_r = \frac{K}{\mu}(\rho_s - \rho)g\,.$$

Calculer la vitesse théorique de fluidisation ou de renardage (on donne ρ_s = 2,5 g/cm^3 pour les billes de verre et $\mu = 10^{-3}$ Pa.s pour l'eau). Calculer la valeur du nombre de Reynolds basé sur le diamètre des billes (1 mm) correspondant au renardage. Comparer les vitesses moyennes expérimentales $u = q_v / A$ de l'écoulement à la vitesse théorique de renardage. Commenter.

II - ECOULEMENT A SURFACE LIBRE A TRAVERS UN BARRAGE POREUX

L'expérience consiste à visualiser la surface libre d'un écoulement d'eau à travers un barrage poreux, et à vérifier la formule de Dupuit par la mesure du débit en fonction de la différence de hauteur d'eau entre l'amont et l'aval du barrage.

1. - Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental (figure 2) est un modèle réduit de barrage. Une cuve étroite entre deux parois vitrées permet d'observer un écoulement de filtration plan. Le barrage poreux est représenté par un empilement de billes de verre de diamètre d = 1 mm disposé entre deux parements grillagés. L'envergure du barrage est e = 41,5 mm et sa longueur est L = 30 cm.

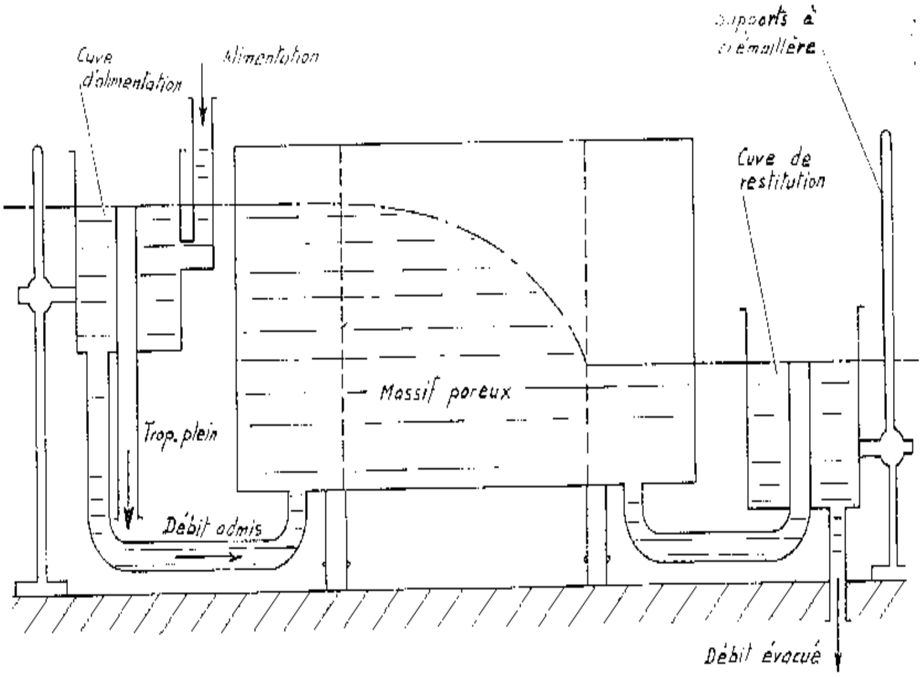

Figure 2 : Schéma du barrage.

Les hauteurs d'eau amont h_1 et aval h_2 sont réglables par l'intermédiaire de deux réservoirs munis de trop plein et montés sur crémaillère.

2. Manipulation

Fixer la hauteur amont à une valeur déterminée, par exemple h_1 = 33 cm. En maintenant h_1 constant, diminuer progressivement la hauteur aval h_2 de la valeur $h_2 = h_1$ jusqu'à $h_2 = 0$. On prendra une dizaine de valeurs de h_2. Il conviendra de toujours réajuster le niveau du réservoir amont de façon à ce que h_1 reste constant lorsque h_2 varie. Pourquoi h_1 a-t-il tendance à diminuer lorsque h_2 diminue ?

Mesure du débit

Pour chaque valeur de h_2 , mesurer le débit volumique $q_{v\ exp}$ à l'aide d'une éprouvette graduée et d'un chronomètre.

Observation du ruissellement

Observer à partir de quelle hauteur critique h_{2c} apparaît le ruissellement, c'est-à-dire lorsque la surface libre interne ne se raccorde plus à la surface libre aval (points B et C non confondus). La hauteur h_s= BC est alors dite hauteur de ruissellement (figure 3).

Observer comment varie le point B lorsque le point C descend. En déduire comment varie la hauteur de ruissellement.

Observation de la surface libre

Lorsque h_2 diminue, observez la forme de la surface libre. Pourquoi l'eau monte-t-elle dans le barrage poreux plus haut que h_1 au voisinage du parement grillagé amont?

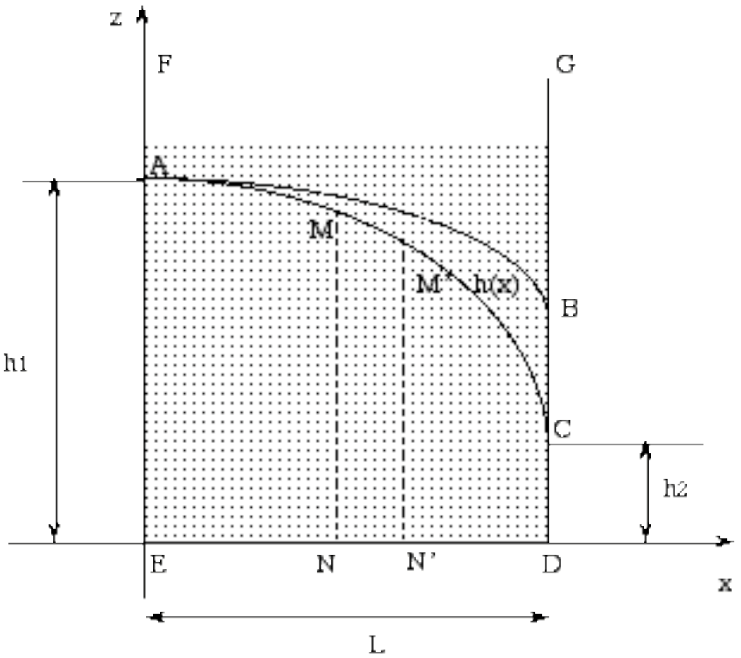

Figure 3 : Ecoulement à travers le barrage.

3. Calculs et résultats

Tracer les points expérimentaux $q_{v\exp}$ en fonction de h_2 / h_1. En déduire le débit maximum atteint noté $q_{vmax.exp}$. Comparer ce débit avec celui atteint théoriquement par la loi de Dupuit (voir l'annexe théorique) :

$$q_{v_{\max\,th}} = \frac{K}{\mu} e \rho g \frac{h_1^2}{2L}$$

où l'on prendra pour K la valeur obtenue dans la manipulation du § I du TP.

Tracer sur un même graphe les rapports expérimental $\frac{q_{v\exp}}{\left(q_{v\exp}\right)_{\max}}$ et théorique $\frac{q_{v\,th}}{\left(q_{v\,th}\right)_{\max}}$ en fonction de $(h_2 / h_1)^2$. Conclusions, remarques et commentaires.

ANNEXE THEORIQUE

1. La loi de Darcy

La loi de Darcy régissant l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité μ à travers un milieu poreux de perméabilité *K* est :

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\mu}\nabla(p + \rho g z)$$

L'axe *z* est vertical orienté vers le haut et *g* est l'accélération de la pesanteur.

La conservation de la masse en régime d'écoulement permanent s'écrit $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$. Ainsi, dans un milieu homogène et isotherme où *K* et μ sont constants, on a :

$$\operatorname{div}\left(-\frac{K}{\mu}\nabla(p + \rho g z)\right) = \nabla^2\left(-\frac{K}{\mu}(p + \rho g z)\right) = 0$$

En posant $\phi = -\frac{K}{\mu}(p + \rho g z)$, on a la relation $\nabla^2\phi = 0$. La vitesse de filtration **u** dérive donc d'un potentiel ϕ qui satisfait à l'équation de Laplace.

2. Ecoulement à surface libre à travers un barrage poreux

L'écoulement dans la partie du barrage poreux où il a lieu (limitée par ABCDA, voir figure 3) obéit à la loi de Darcy. Puisque, en ce qui concerne l'expression des vitesses et donc des débits, ϕ n'intervient que par son gradient, on peut choisir arbitrairement l'origine des pressions et celle des altitudes, et prendre pour origine des pressions la pression atmosphérique ($p_{atm} = 0$) et pour origine des altitudes celle du fond imperméable. Dans ces conditions, dans le réservoir supérieur et donc le long de la frontière AE, on a :

$$p + \rho g z = cte\ .$$

Or la pression est telle que $p = p_{atm} + \rho g(h_1 - y)$. On a donc $p + \rho g z = \rho g h_1$.

En effet, les vitesses de filtration étant très faibles, les vitesses de l'eau dans le réservoir, même au voisinage du barrage seront faibles et les pressions dynamiques (ou motrices) négligeables (cas de l'hydrostatique) ; la condition au limite sur ϕ est pratiquement:

$$\phi(x = 0) = -\frac{K}{\mu}\rho g h_1\ .$$

Pour les mêmes raisons, dans le réservoir aval, et donc sur la frontière CD, on a:

$$\phi(x = L) = -\frac{K}{\mu}\rho g h_2\ .$$

Sur le fond imperméable E D, la vitesse de filtration est tangente à ED et :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Enfin, la zone où le fluide s'écoule est séparée de celle où les espaces entre particules solides sont remplis d'air par une surface "libre" AMB, le long de laquelle la pression de l'eau est égale à la pression atmosphérique ($p_{atm} = 0$), et qui, dans le plan de section droite, constitue une ligne de courant AMB limite de l'écoulement. A travers cette ligne de courant AMB, le débit est nul :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Le long de cette ligne, on a : $\varphi = -\frac{K}{\mu}\left(p + \rho g z\right) = -\frac{K}{\mu}\rho g z$ (puisque $p_{atm} = 0$), c'est-à-dire, un potentiel $\varphi(M)$ proportionnel à l'altitude z du point M.

Enfin la partie BC est la trace, dans le plan de la figure d'une surface à laquelle parviennent des lignes de courant et le long de laquelle l'eau "suinte" ou "ruisselle".

Cette partie est appelée "surface de suintement" ou "surface de ruissellement". Le long de BC, la pression de l'eau est encore égale à la pression atmosphérique et donc le potentiel est donné par :

$$\varphi = -\frac{K}{\mu}\rho g z.$$

Mais BC n'est pas une ligne de courant, puisqu'un débit traversant BC, sort du barrage en terre et ruisselle ensuite, à l'air libre, le long de BC.

Détermination du débit traversant le barrage

Le débit dans un barrage a été calculé pour la première fois par Dupuit, qui a fait deux hypothèses, approximations de la réalité :

- La première hypothèse est que la surface libre, partant du point A, aboutit au point C : il n'a pas pris en compte l'existence d'une surface de ruissellement ;
- La deuxième hypothèse est que les équipotentielles sont des plans verticaux x = cte, parallèles aux deux parements : la vitesse est alors horizontale et donnée par la loi de Darcy:

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\mu}\rho g \frac{dh}{dx},$$

en ayant posé $z = h(x)$ comme équation de la surface libre (fig. 2)

La conservation de la masse dans une tranche MNN'M' du barrage fournit alors la relation :

$$q_v = Ueh = -\frac{K}{\mu} e \rho g h \frac{dh}{dx} = cte.$$

Par suite :

$$\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right) = 0.$$

On a donc :

$$h^2 = ax + b,$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$Pour\ x = 0, \qquad h_1^2 = b$$
$$Pour\ x = L \qquad h_2^2 = a\,L + h_1^2$$

La surface libre est donc un arc de parabole d'équation :

$$z^2 = h^2 = -\frac{h_1^2 - h_2^2}{L} x + h_1^2 .$$

De cette équation, on tire :

$$h\frac{dh}{dx} = -\frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}$$

et par suite :

$$q_v = \frac{K}{\mu} e \rho g \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}$$

qui constitue la loi de Dupuit.

Ainsi Dupuit, en sous-estimant la hauteur traversée h, mais en surestimant le gradient dh/dx, c'est-à-dire les vitesses, a abouti à une formule dont on pensa longtemps qu'elle était approchée alors qu'elle est en réalité exacte ! La démonstration rigoureuse peut être établie grâce à la considération de la surface de ruissellement et à l'utilisation de la relation de Green.